

Manajemen Sains

Pemrograman Linier (Metode Grafik)

Eko Prasetyo
Teknik Informatika
Univ. Muhammadiyah Gresik 2011

Komponen dasar

- Variabel keputusan
yang kita cari untuk ditentukan
- Objective (tujuan)
yaitu ingin mengoptimalkan (memaksimalkan atau meminimalkan)
- Constraints
yaitu solusi yang harus dicapai.

LP Metode Grafik

- Tujuan yang ingin dicapai adalah mendapatkan solusi grafis dari pemrograman linear *dua variabel*.
- Metode grafik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear dua variabel (x dan y)
- Tiga variabel juga bisa tetapi sangat menyulitkan dalam penyelesaiannya karena menggunakan tiga sumbu dalam penggambaran koordinatnya.

Contoh kasus model Reddy Mikks

- Perusahaan Reddy Mikks memproduksi cat interior dan exterior dari dua bahan baku, M1 dan M2. Tabel dibawah ini adalah informasi mengenai kebutuhan bahan baku, ketersediaan, dan keuntungannya
- Survey pasar menunjukkan bahwa kebutuhan perhari untuk cat interior tidak boleh melebihi cat exterior lebih dari 1 ton, juga kebutuhan harian maksimal untuk cat interior adalah 2 ton.
- Reddy Mikks ingin menentukan jumlah optimal (terbaik) produk antara cat interior dan exterior dengan memaksimalkan total keuntungan harian.
- .

Contoh kasus model Reddy Mikks

Produk	Kebutuhan bahan baku (ton)		Keuntungan (x1000)
	M1	M2	
Cat Ext	6	1	5
Cat Int	4	2	4
Kapasitas	24	6	Z

Penyelesaian kasus model Reddy Mikks

- Menentukan Variabel Keputusan
- Menentukan Fungsi Tujuan
- Menentukan Constraint

Penyelesaian kasus model Reddy Mikks

- **Menentukan Variabel Keputusan**
- Menentukan Fungsi Tujuan
- Menentukan Constraint

Menentukan Variabel Keputusan

- Tentukan jumlah produksi cat exterior dan interior perhari. Maka variabel dari model didefinisikan sebagai :
 - x_1 = ton produksi harian cat exterior
 - x_2 = ton produksi harian cat interior

Penyelesaian kasus model Reddy Mikks

- Menentukan Variabel Keputusan
- **Menentukan Fungsi Tujuan**
- Menentukan Constraint

Menentukan Fungsi Tujuan

- Fungsi tujuan, perusahaan ingin memaksimalkan total keuntungan harian dari kedua produk.
 - Cat exterior adalah 5 (x1000) per unit
 - Cat interior adalah 4 (x1000) per unit
- Maka dapat didefinisikan bahwa :
 - Total keuntungan dari cat exterior = $5x_1$ (x1000) rupiah
 - Total keuntungan dari cat interior = $4x_2$ (x1000) rupiah
- Jika Z merepresentasikan total keuntungan harian, tujuan perusahaan adalah :
 - Maksimalkan $Z = 5x_1 + 4x_2$

Penyelesaian kasus model Reddy Mikks

- Menentukan Variabel Keputusan
- Menentukan Fungsi Tujuan
- **Menentukan Constraint**

Menentukan Constraint

- Constraint yang membatasi bahan baku yang digunakan dan kebutuhan produk pada bahan baku.
 - (Penggunaan bahan baku oleh kedua produk) \leq Kapasitas ketersediaan bahan baku
- Pembatasan bahan baku dinyatakan secara verbal sebagai :
 - Penggunaan harian bahan baku M1 adalah 6 ton untuk cat exterior dan 4 ton untuk cat interior. Maka :
 - Penggunaan bahan baku M1 oleh cat exterior = $6x_1$ ton/hari
 - Penggunaan bahan baku M1 oleh cat interior = $4x_2$ ton/hari
- Sehingga :
 - Penggunaan bahan baku M1 oleh kedua cat = $6x_1 + 4x_2$ ton/hari
 - Penggunaan bahan baku M2 oleh kedua cat = $1x_1 + 2x_2$ ton/hari
- Karena ketersediaan harian dari bahan baku M1 dan M2 dibatasi 24 dan 6 ton, maka hubungan batasan yang diberikan menjadi :
 - $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (bahan baku M1)
 - $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (bahan baku M2)

Menentukan Constraint (*Cont'd*)

- Batasan permintaan yang pertama adalah bahwa batas produksi harian cat interior melebihi cat exterior, $x_2 - x_1$, seharusnya tidak melewati 1 ton, yang ditranslasikan dengan :
 $x_2 - x_1 \leq 1$ (batas pasar)
- Batasan permintaan yang kedua adalah bahwa maksimal kebutuhan harian cat interior dibatasi 2 ton, yang ditranslasikan dengan :
 $x_2 \leq 2$ (batas permintan)
- Batasan implicit (pemahaman mandiri) adalah bahwa bahwa variabel x_1 dan x_2 tidak dapat diasumsikan bernilai negatif, karena tidak mungkin jumlah produksi bernilai negatif. Batasan nonnegative, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, dapat dipertanggungjawabkan untuk kebutuhan ini.

Model lengkap Reddy Mikks

- Maksimalkan $Z = 5x_1 + 4x_2$
- Kendala :
 - $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (1)
 - $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (2)
 - $-x_1 + x_2 \leq 1$ (3)
 - $x_2 \leq 2$ (4)
 - $x_1, x_2 \geq 0$ (5)
- Sembarang nilai x_1 dan x_2 yang memenuhi semua lima constraint disebut dengan solusi yang layak (**feasible solution**), jika tidak maka merupakan solusi yang tidak layak (**unfeasible**)

Prosedur penyelesaian menggunakan metode grafik

1. Menentukan lokasi solusi yang layak
2. Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak.

Prosedur penyelesaian menggunakan metode grafik

1. Menentukan lokasi solusi yang layak
2. Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak.

Menentukan lokasi solusi yang layak

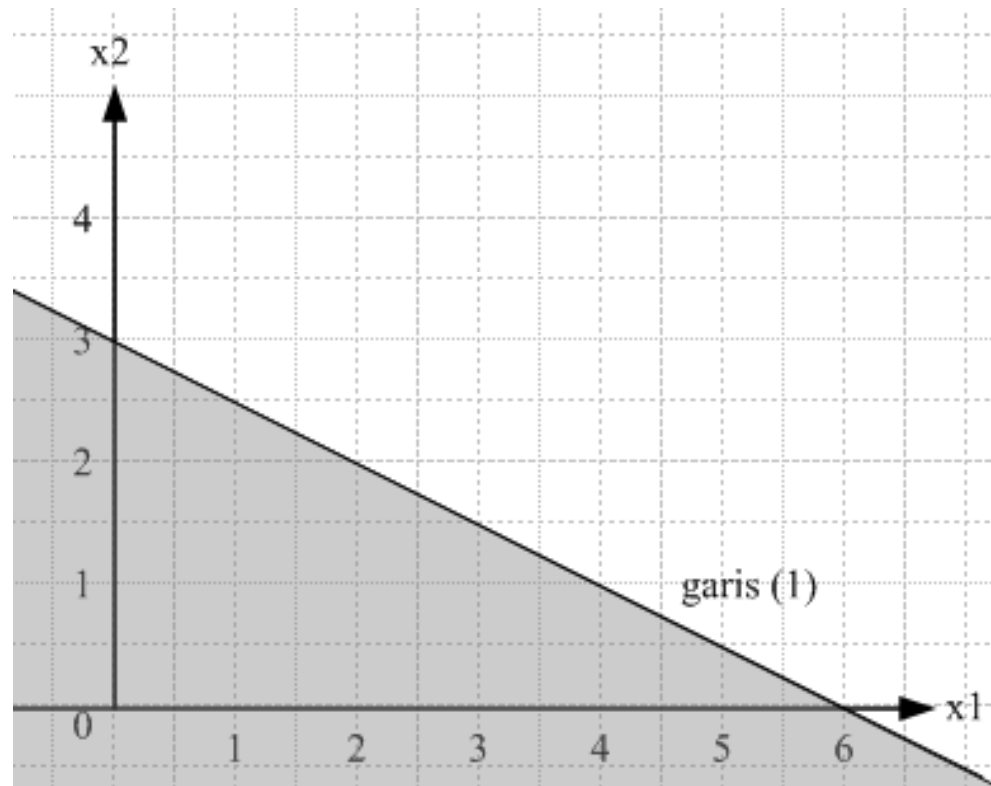
- Constraint nonnegative $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$.
 - Dalam gambar sumbu horizontal x_1 dan vertikal x_2 mewakili variabel cat exterior dan interior.
 - Maka untuk nilai variabel nonnegative berada di kuadran pertama.
- Constraint yang lain :
 - Pertama perlu mengganti setiap tanda pertidaksamaan dengan persamaan
 - Menggambar garis lurus dengan memilih dua titik berbeda yang memenuhi persamaan garis pada diagram. Misalnya setelah mengganti $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ dengan garis lurus $6x_1 + 4x_2 = 24$, kita dapat menentukan dua garis berbeda yang dilalui garis tersebut. Caranya dengan mengganti $x_1 = 0$ untuk mendapatkan $x_2 = 24/4 = 6$, dan mengganti $x_2 = 0$ untuk mendapatkan $x_1 = 24/6 = 4$.
 - Maka garis untuk persamaan tersebut melewati dua titik (0,6) dan (4,0), seperti yang ditunjukkan pada gambar.

Menentukan lokasi solusi yang layak (*cont'd*)

- Memperhatikan pengaruh pertidaksamaan.
- Garis tersebut membagi daerah menjadi dua bagian, hanya satu bagian yang merupakan sisi yang benar yang memenuhi pertidaksamaan.
- Untuk menentukan sisi yang benar, ujilah titik disalah satu sisi (titik yang tidak dilewati garis), misalnya (0,0) maka didapatkan $6 * 0 + 4 * 0 = 0$ dan $0 \leq 24$, berarti daerah yang ditempati titik (0,0) adalah daerah yang memenuhi pertidaksamaan tersebut.
- Dalam gambar yang ditampilkan daerah tersebut diarsir.

Menentukan lokasi solusi yang layak (*cont'd*)

- $6x_1 + 4x_2 \leq 24$

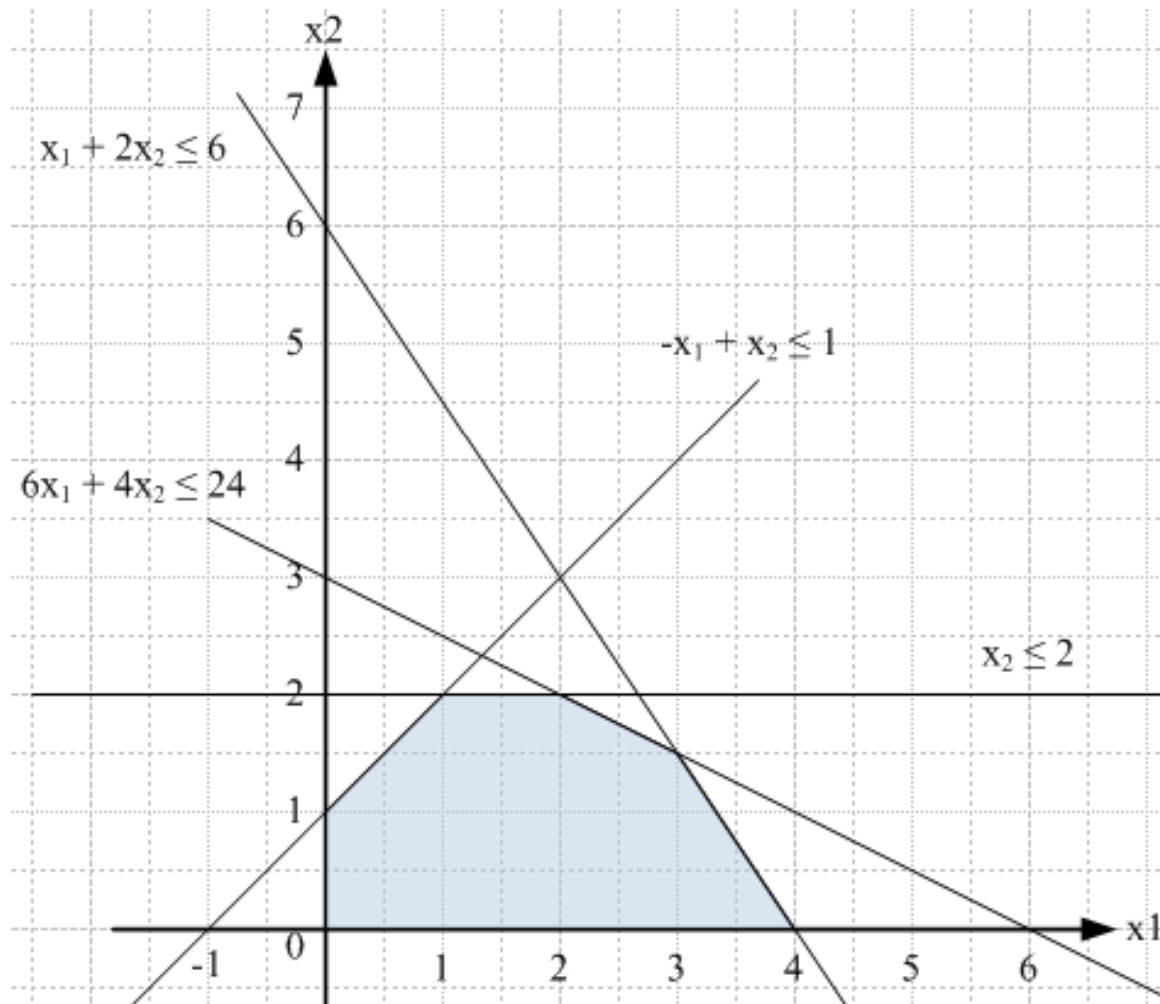


Menentukan lokasi solusi yang layak (*cont'd*)

- Dilakukan juga pada constraint yang lain

Constrain	Titik potong dengan sumbu x_1 dan x_2
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$	(0,6) dan (4,0)
$x_1 + 2x_2 \leq 6$	(0,3) dan (6,0)
$-x_1 + x_2 \leq 1$	(0,1) dan (-1,0)
$x_2 \leq 2$	Garis horizontal yang melewati $x_2 = 2$

Menentukan lokasi solusi yang layak (*cont'd*)



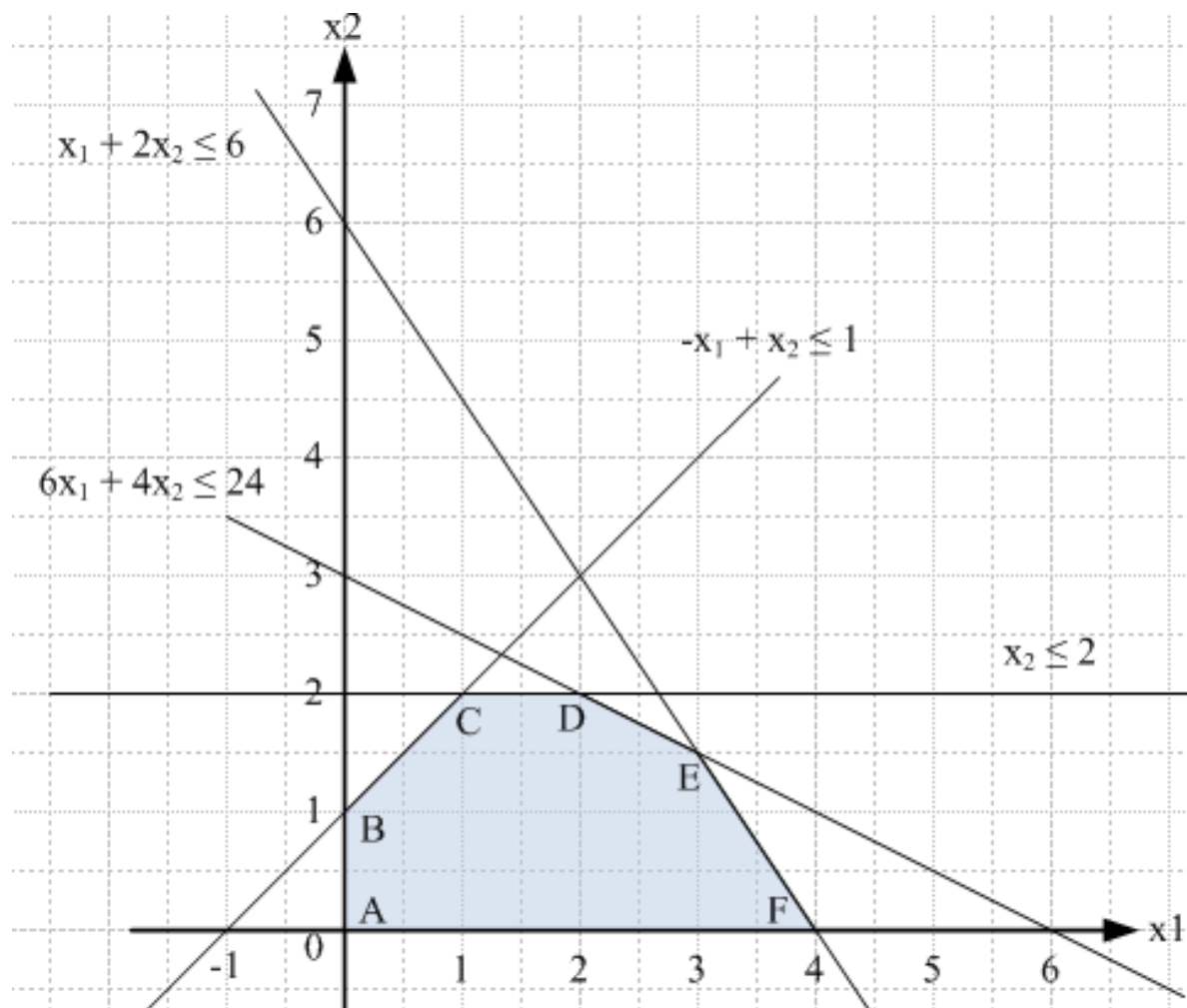
Prosedur penyelesaian menggunakan metode grafik

1. Menentukan lokasi solusi yang layak
2. Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak.

Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak

- Daerah solusi layak seperti pada gambar adalah daerah yang diarsir yang diliputi oleh semua constraint.
- Semua titik yang berada di daerah tersebut adalah daerah solusi layak.
- Karena jumlahnya sangat banyak, maka perlu cara yang sistematis untuk mendapatkan titik optimal dari solusi masalah.
- Daerah solusi layak dibatasi oleh titik ABCDEF seperti pada

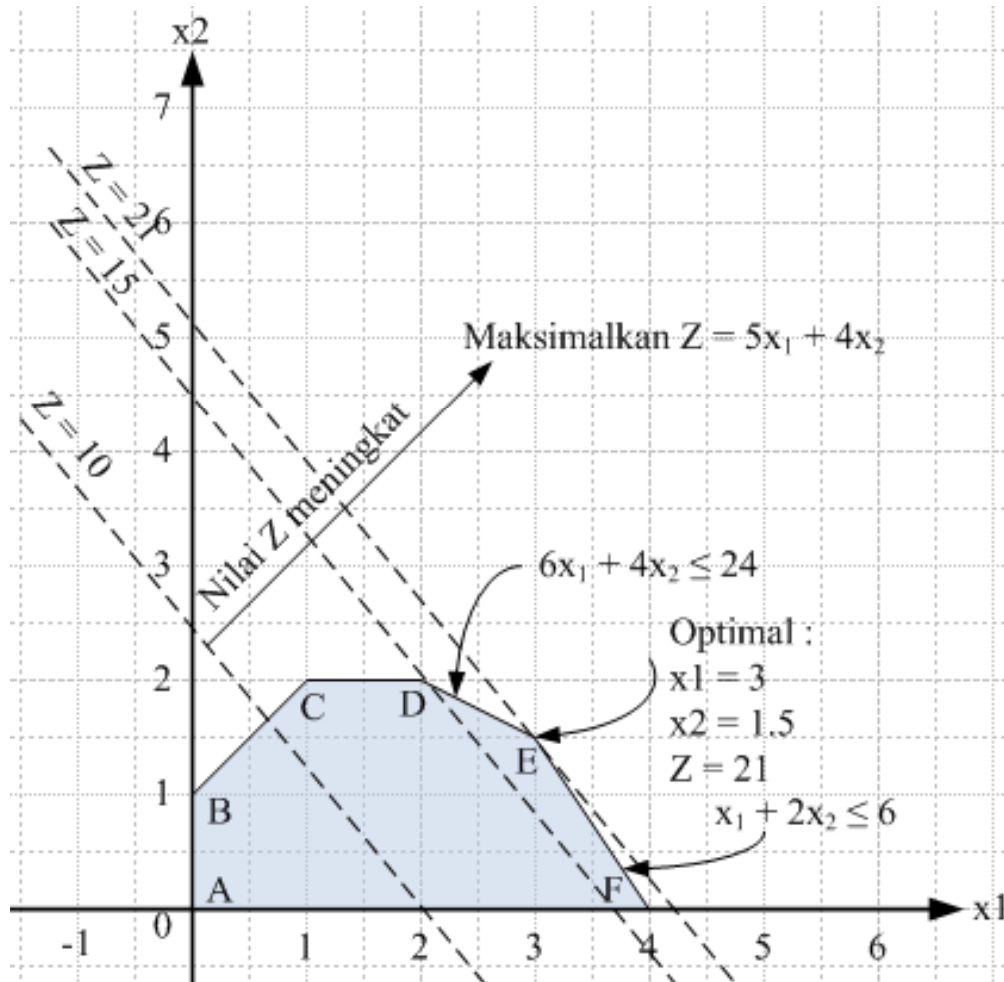
Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)



Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)

- Identifikasi arah dari fungsi profit $Z = 5x_1 + 4x_2$
- Ingin memaksimalkan Z .
- Nilai Z sementara coba digunakan nilai sembarang terlebih dahulu untuk mengetahui arah peningkatan nilai Z pada gambar. Misalnya, menggunakan $Z = 10$ dan $Z = 15$, akan memberikan garis putus-putus pada gambar dengan persamaan $5x_1 + 4x_2 = 10$ dan $5x_1 + 4x_2 = 15$.
- Maka arah peningkatan Z seperti ditunjukkan pada gambar. Solusi optimal berada dititik E. Untuk mendapatkan nilai x_1 dan x_2 dititik E diselesaikan dengan gabungan garis fungsi constraint (1) dan (2) :

Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)



Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 = 6 \text{ atau } x_1 = 6 - 2x_2$$

Dengan mensubstitusikan persamaan kedua pada persamaan pertama, didapatkan :

$$6(6 - 2x_2) + 4x_2 = 24$$

$$36 - 12x_2 + 4x_2 = 24$$

$$-8x_2 = -12$$

$$x_2 = 1.5$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_1 + 2(1.5) = 6$$

$$x_1 + 3 = 6$$

$$x_1 = 3$$

Dengan cara aljabar, didapatkan bahwa $x_1 = 3$ dan $x_2 = 1.5$ dengan

$$Z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1.5 = 21.$$

Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)

- Evaluasi semua titik sudut pada daerah solusi yang layak
- Solusi optimal didapatkan dititik E dengan nilai $x_1 = 3$ ton dan $x_2 = 1.5$ ton dan laba maksimal yang didapat $Z = 21000$

Titik sudut	(x_1, x_2)	Z
A	(0,0)	0
B	(0,1)	4
C	(1,2)	13
D	(2,2)	18
E	(3,1.5)	21 (OPTIMAL)
F	(4,0)	20

Contoh kasus Ozark Farms

- Ozark Farms memproduksi paling sedikit 800 lb makanan khusus perhari.
- Makanan khusus itu adalah campuran jagung dan tepung kedelai dengan komposisi seperti pada tabel.
- Kebutuhan pada aturan makan (diet) dari makanan khusus adalah paling sedikit 30% protein dan paling banyak 5% fiber.
- Ozark Farms ingin menentukan biaya minimal campuran makanan perhari.

Bahan	lb per lb bahan		Harga (\$/lb)
	Protein	Fiber	
Jagung	0.09	0.02	0.3
Tepung kedelai	0.6	0.06	0.9
Kapasitas	24	6	Z

Menentukan Variabel Keputusan

- Karena campuran makanan terdiri dari jagung dan tepung kedelai, variabel keputusan dari model didefinisikan sebagai :
 - x_1 = lb jagung dalam campuran perhari
 - x_2 = lb tepung kedelai dalam campuran perhari

Menentukan Fungsi Tujuan

- Fungsi tujuannya adalah berusaha meminimalkan total biaya harian (dalam dolar) dari campuran makanan, diekspresikan sebagai :
 - Minimalkan $Z = 0.3x_1 + 0.9x_2$

Menentukan Constraint

- Constraint dari model adalah jumlah harian dan kebutuhan makanan. Karena Ozark Farms memerlukan paling sedikit 800 lb makanan perhari, constraintnya dapat dibentuk :

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

- Sebagai constraint kebutuhan protein makanan, jumlah protein yang dikandung dalam x_1 lb dan x_2 lb adalah $(0.09x_1 + 0.6x_2)$ lb. Jumlah ini harus kurang dari atau sama dengan 30% dari total campuran makanan $(x_1 + x_2)$ lb, maka :

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

- Jika suku disisi kiri dipindah kekanan menjadi :

$$0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$$

- Dengan cara yang sama, kebutuhan fiber paling banyak 5% dibentuk sebagai

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

$$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$

Model lengkap kasus Ozark Farms

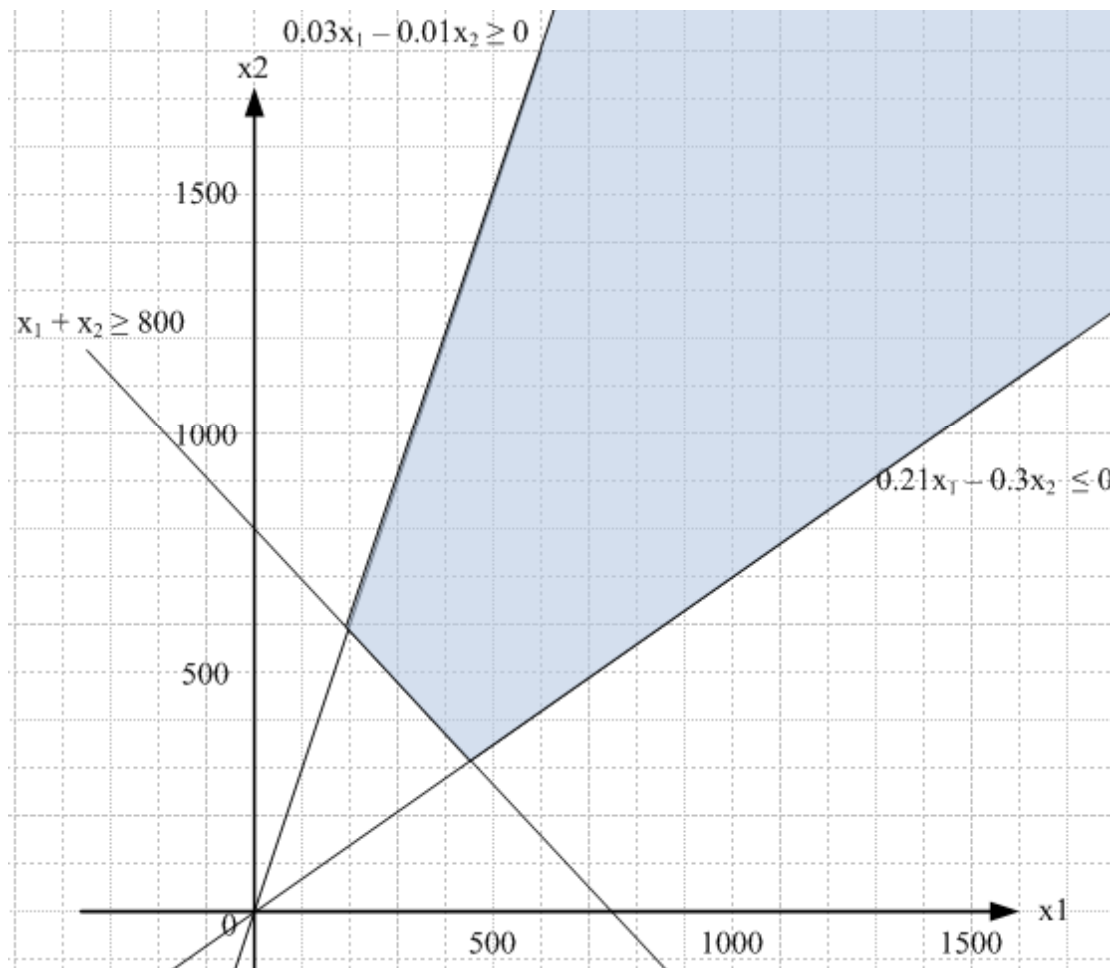
- Minimalkan $Z = 0.3x_1 + 0.9x_2$
- Kendala :
 - $x_1 + x_2 \geq 800$ (1)
 - $0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$ (2)
 - $0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$ (3)
 - $x_1, x_2 \geq 0$ (4)

Menentukan solusi yang layak

- Mendapatkan dua titik yang dilewati constraint

Constrain	Dua titik yang dilewati garis
$x_1 + x_2 \geq 800$	(0,800) dan (800,0)
$0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$	(0,0) dan (1000,700)
$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$	(0,0) dan (500,1500)

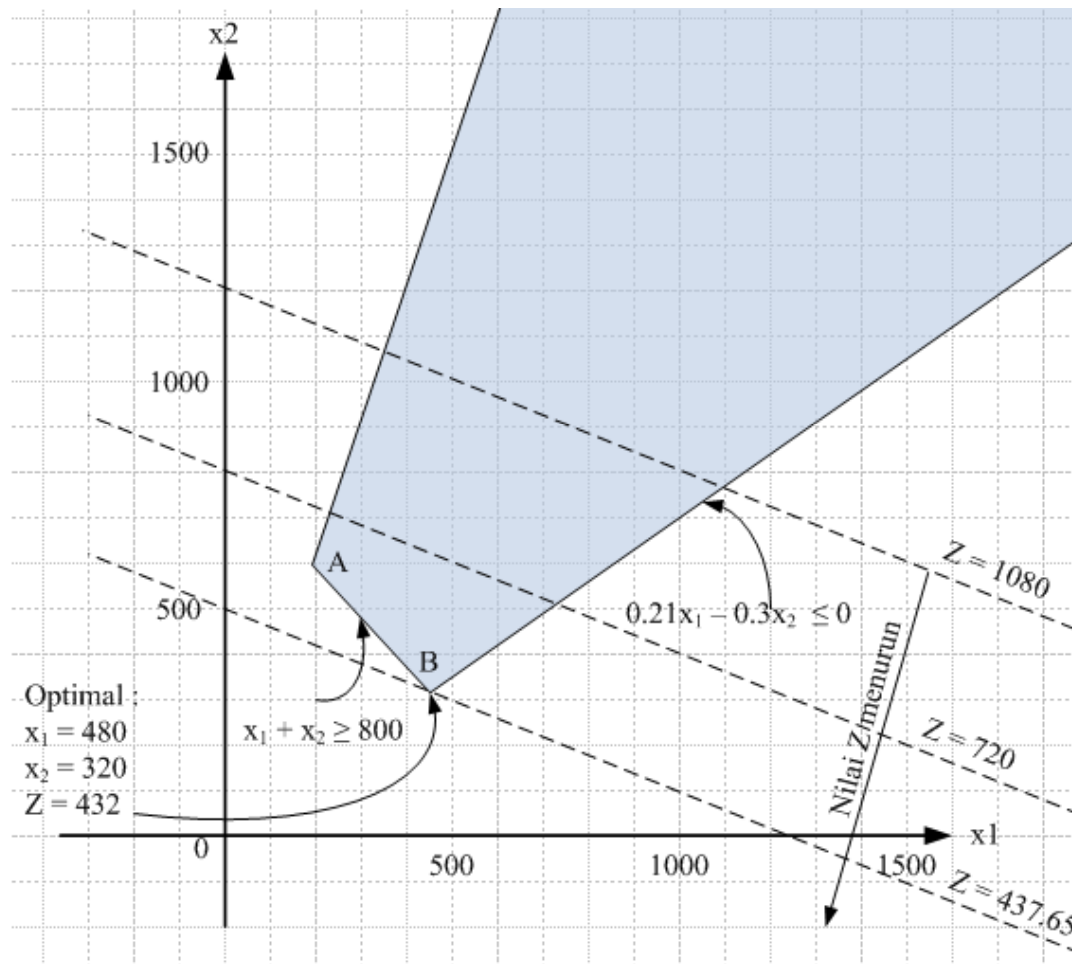
Menentukan solusi yang layak (*cont'd*)



Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak

- Identifikasi arah dari fungsi biaya $Z = 0.3x_1 + 0.9x_2$
- Ingin meminimalkan Z . Untuk itu, untuk nilai Z sementara coba digunakan nilai sembarang terlebih dahulu untuk mengetahui arah penurunan nilai Z pada gambar.
- Misalnya, menggunakan $Z = 1080$ dan $Z = 720$, akan memberikan garis putus-putus pada gambar dengan persamaan $0.3x_1 + 0.9x_2 = 1080$ dan $0.3x_1 + 0.9x_2 = 720$.
- Maka arah penurunan Z seperti ditunjukkan pada gambar. Solusi optimal berada dititik B.
- Untuk mendapatkan nilai x_1 dan x_2 dititik B diselesaikan dengan gabungan garis fungsi constraint (1) dan (2)

Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)



Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)

- $x_1 + x_2 = 800$ atau $x_1 = 800 - x_2$ (1)
- $0.21x_1 - 0.3x_2 = 0$ (2)
- Dengan mensubstitusikan persamaan pertama pada persamaan kedua, didapatkan :

$$0.21(800 - x_2) - 0.3x_2 = 0$$

$$168 - 0.21x_2 - 0.3x_2 = 0$$

$$168 - 0.51x_2 = 0$$

$$-0.51x_2 = -168$$

$$x_2 = -168/-0.51 = 329.41$$

$$x_1 + x_2 = 800$$

$$x_1 + 329.41 = 800$$

$$x_1 = 800 - 329.41$$

$$x_1 = 470.59$$

- Dengan cara aljabar, didapatkan bahwa
 - $x_1 = 470.59$ lb
 - $x_2 = 329.41$ lb
 - $Z = 0.3 \cdot 470.59 + 0.9 \cdot 329.41 = 437.65$.

Menentukan solusi optimal dari diantara semua titik sudut solusi layak (*cont'd*)

- Evaluasi semua titik sudut didaerah solusi yang layak
- Dari hasil evaluasi semua titik-titik sudut menunjukkan bahwa solusi optimal didapatkan dititik B dengan nilai $x_1 = 470.59$ lb dan $x_2 = 329.41$ lb dan biaya yang didapat $Z = 437.65$

Titik sudut	(x_1, x_2)	Z
A	(200,600)	600
B	(470.59,329.41)	437.65 (OPTIMAL)

Tugas

- Baca Modul 3 Pemrog Linier metode simpleks
- Kerjakan soal modul 2:
 - Kelompok 1 : 2.1(a) dan 2.4
 - Kelompok 2 : 2.1(b) dan 2.5
 - Kelompok 3 : 2.1(c) dan 2.8
 - Kelompok 4 : 2.1(d) dan 2.9
 - Kelompok 5 : 2.2(a) dan 2.11
 - Kelompok 6 : 2.2(b) dan 2.12
 - Kelompok 7 : 2.2(c) dan 2.13
- Pengerjaan :
 - Satu kelompok berisi maksimal 7 orang
 - Ditulis tangan pada kertas folio bergaris oleh masing-masing anggota
 - Dikumpulkan pada pertemuan berikutnya